آزمون جامع «۱»

۱. گزینه‌ی (۴)

چون در بازه‌ی $0 \le x < 1$ تابع، به تابع ثابت $f(x) = 0$ تبدیل می‌شود $(0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0)$ بنابراین در همین بازه تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد زیرا مشتق در تمامی نقاط آن صفر است.

۲. گزینه‌ی (۱)

با توجه به اینکه تغییرات تابع در اطراف نقطه‌ی $x = 0$ احساس می‌شود، کافی است ببینیم به ازای $x \to 0^+$ و $x \to 0^-$ مقادیر تابع چقدر است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x^3+1} = 1^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^3+1} = 1^- \end{cases}$$

نکته: برای تشخیص جواب دقیق حد (1^+ یا 1^- بودن تابع) کافی است برای محاسبه‌ی $x \to 0^+$ عدد ۰/۱ را به جای x بگذاریم و برای محاسبه‌ی $x \to 0^-$ عدد ۰/۱- را به جای x بگذاریم و ببینیم جواب تابع مقداری از ۱ بیشتر می‌شود یا کم‌تر.

۳. گزینه‌ی (۲)

چون قبل از صفر تقعر منحنی رو به بالا و بعد از نقطه صفر تقعر منحنی رو به پایین است $x = 0$ نقطه‌ی عطف منحنی است.

$f''(0) = 0$

$f''(x) = (-3x^2 + 2ax + b)' = -6x + 2a \xrightarrow{x=0}$

$2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$f(x) = -x^3 + bx$

علاوه بر این در نقطه‌ی $x = 0$ شیب خط مماس بر منحنی همواره کوچک‌تر از صفر یا منفی است.

$f'(x) = -3x^2 + b \xrightarrow{x=0} b < 0 \Rightarrow b = -1$ با توجه به گزینه‌ها

$(a, b) = (0, -1)$

۴. گزینه‌ی (۳)

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی کافی است از تابع مشتق بگیریم و مشتق را تعیین علامت کنیم:

$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x = 0 \Rightarrow -4\sin x \cos x + 2\sin x = 0$

$$-2\sin x(2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
		min نسبی		max نسبی		min نسبی	

۵. گزینه‌ی (۲)

ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، تابع داده شده را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x^2 - 1| = \begin{cases} x^3 - x & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ x - x^3 & -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

با محاسبه‌ی مشتق تابع داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ 1 - 3x^2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = f'_+(-1) = 2 \\ f'_-(1) = f'_-(-1) = -2 \end{cases} \rightarrow$$

تابع در $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر و در نتیجه بحرانی است.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی این تابع عبارت است از

$\{\pm 1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$

۶. گزینه‌ی (۳)

نکته: در $f(x) = (x-a)^{2n} g(x) + b$ نقطه‌ی $x = a$ نقطه‌ی اکسترمم تابع است و اگر:

$$\begin{cases} g(a) > 0 & \text{min نسبی} \\ g(a) < 0 & \text{m بی} \end{cases}$$

$\Rightarrow g(1) = (1+2)^3 = 27 > 0 \Rightarrow$ $x = 1$ نقطه‌ی min نسبی است

۷. گزینه‌ی (۲)

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 3(x-1)^2$$

در $x = 1$ تابع مشتق‌پذیر نیست.

۸. گزینه‌ی (۲)

می‌دانیم برای یافتن نقاط اکسترمم (min و max) باید مشتق تابع را برابر صفر قرار دهیم.

$f'(x) = 6x^2 + 6x = 0$

$$\Rightarrow 6x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = m & A(0, m) \\ x = -1 \to y = 1 + m & B(-1, m+1) \end{cases}$$

فاصله‌ی A و B از خط $y = 2$ را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$\Rightarrow |m - 2| = |m + 1 - 2|$

$$\begin{cases} m - 2 = m - 1 \Rightarrow -2 = -1 & \text{غ ق ق} \\ m - 2 = -m + 1 \Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow m = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

۹. گزینه‌ی (۲)

برای بررسی تقعر منحنی کافی است مشتق دوم را تعیین علامت کنیم:

$f'(x) = \dfrac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} - \dfrac{12}{5}x^{\frac{-4}{5}}$

$f''(x) = \dfrac{6}{25}x^{\frac{-4}{5}} + \dfrac{48}{25}x^{\frac{-9}{5}} = 0$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6}{25}x^{\frac{-9}{5}}(x+8) = \frac{6(x+8) = 0}{25\sqrt[5]{x^9} = 0} \begin{matrix} \Rightarrow x = -8 \\ \Rightarrow x = 0 \end{matrix}$$

		-8		0	
y''	$+$		$-$		$+$
	$\cup$		$\cap$		

$\Rightarrow (-8, 0)$

۱۰. گزینه‌ی (۴)

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

در توابع اکیداً صعودی $y' \ge 0$ است، پس داریم:

$(1+x)e^x > 0 \xrightarrow{e^x > 0} 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

با توجه به گزینه‌ی داده شده، گزینه‌ی (۴) پاسخ صحیح است، زیرا در گزینه‌های دیگر محدوده‌ها کوچک‌تر از (۱-) را شامل می‌شوند.

۱۱. گزینه‌ی (۳)

برای تعیین بازه‌های صعودی یا نزولی بودن تابع کافی است مشتق تابع را تعیین علامت کنیم.

$$y' = -x^2 + 2x + 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = 3$$

x		-1		3	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ تابع در بازه‌ی $(-1,3)$ صعودی است.

۱۲. گزینه‌ی (۳)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{غ ق ق} & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f(-1) = 2$ مطلق max

$f(0) = 0$ مطلق min

۱۳. گزینه‌ی (۱)

$$y = \sin^3 x \Rightarrow y' = 3\sin^2 x \cos x \xrightarrow{x=\pi} y' = 0$$

		π	
y'	$-$	0	$-$

نقطه اکسترمم نیست

$$y' = \frac{3}{2}\sin x \sin 2x$$

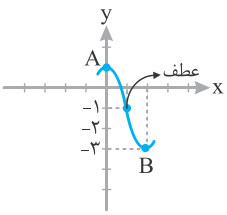
$$y'' = \frac{3}{2}(\cos x \sin 2x + 2\cos 2x \sin x) \xrightarrow{x=\pi} y'' = 0$$

		π	
y''	$+$	0	$-$
	$\cup$		$\cap$

چون جهت تقعر عوض می‌شود، نقطه عطف است.

۱۴. گزینه‌ی (۴)

فاصله نقطه عطف از نقاط min و max یکسان است. کافی است شکل بکشیم و این نقاط را تعیین کنیم.



$B(2,-3)$

۱۵. گزینه‌ی (۱)

نکته: مرکز تقارن منحنی $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ همواره برابر است با $w(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c})$.

$$y = \frac{x-2}{ax-a^2} \to w(a, \frac{1}{a}) \xrightarrow[y=x]{\text{روی نیمساز ناحیه‌ی}} a = \frac{1}{a}$$

$a^2 = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}$

$\underline{a = -1}$ غ ق ق

۱۶. گزینه‌ی (۱)

$$y' = 1 - 2\cos x \Rightarrow$$

		$\frac{\pi}{4}$	
y'	$-$	0	$-$

نزولی است

$$y'' = 2\sin x \xrightarrow[\frac{\pi}{4}]{\text{در اطراف}} y'' > 0 \quad \text{تقعر روبه بالاست}$$

۱۷. گزینه‌ی (۲)

یعنی مشتق دوم که همواره تعیین‌کننده‌ی جهت تقعر است همواره مثبت است.

$$y' = 4x^3 + 12ax + 12$$

$$y'' = 12x^2 + 12a \xrightarrow{\text{همواره مثبت}} \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 0 - 4(12)(12a) < 0 \\ \Rightarrow a > 0 \\ a > 0 \to 12 > 0 \text{ همواره برقرار است} \end{cases}$$

۱۸. گزینه‌ی (۱)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$f(-1) = 5 \qquad f(1) = -11$

$f(3) = -27 \qquad f(4) = -20$

$\Rightarrow -27$ مطلق min

۱۹. گزینه‌ی (۳)

نکته: در نقطه‌ی عطف مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند. $x = 1$ طول نقطه‌ی عطف است.

$y''(1) = 0$

$y' = 3x^2 + 2ax$

$$y'' = 6x + 2a \xrightarrow{x=1} 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

۲۰. گزینه‌ی (۲)

نقاط بحرانی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.
۲- نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها صفر است.

ممکن است نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد اما مشتق در آن صفر نباشد ولی هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی حتماً یکی از ۲ حالت بالا را داراست بنابراین نقطه‌ی بحرانی است.

آزمون جامع «۲»

۱. گزینه‌ی (۳)

$$f'(x) = \frac{(2x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$$

یک بار صورت را مساوی صفر قرار می‌دهیم، برای تعیین نقاطی که مشتق در آن‌ها برابر صفر است و یکبار مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم، برای تعیین نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است زیرا نقاط بحرانی ۲ دسته‌اند.

۱- نقاطی که مشتق در آن‌ها برابر صفر است.
۲- نقاطی که مشتق در آن‌ها وجود ندارد.

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

۲. گزینه‌ی (۱)

با توجه به شکل مجانب مایل از نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ عبور می‌کند، ابتدا مجانب مایل را به دست می‌آوریم و می‌دانیم برای به دست آوردن مجانب مایل صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + ax & 2x + b \\ \hline \mp x^2 + \frac{-1}{2}bx & \frac{1}{2}x + \frac{(a - \frac{b}{2})}{2} \\ \hline (a - \frac{b}{2})x & \end{array}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{(a-\frac{b}{2})}{2}\xrightarrow{A(0,\frac{1}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{(a-\frac{b}{2})}{2}\Rightarrow a-\frac{b}{2}=1\Rightarrow 2a-b=2 \quad ①$$

از طرفی مجانب قائم مثبت است:

$$\boxed{b<0}\Leftarrow x=\frac{-b}{2}>0\Leftarrow 2a+b=0$$

از طرفی نقطه‌ی $(0,0)$ نقطه‌ی max است. در مشتق تابع صدق می‌کند.

$$y'=\frac{(2x+a)(2x+b)-2(x^2+ax)}{(2x+b)^2}\xrightarrow{x=0}y'=0$$

$$\Rightarrow \boxed{ab=0} \quad ②$$

$$①,②\Rightarrow (\frac{b+2}{2})b=0 \begin{cases} b=0 & \text{غ ق ق} \\ b+2=0\Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

۳. گزینه‌ی (۳)

با توجه به شکل در دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=4$ مشتق تابع برابر صفر است.

$$y'=3ax^2+2bx$$

$$x=0\to y'=0$$

$$x=4\to y'=48a+8b=0\Rightarrow \underline{6a+b=0} \quad ①$$

و با توجه به شکل تابع یک نقطه‌ی عطف دارد زیرا جهت تقعر یکبار عوض شده بنابراین y'' ۱ ریشه دارد و x (ریشه) هم مثبت است.

$$y'=3ax^2+2bx$$

$$y''=6ax+2b\Rightarrow x=\frac{-b}{3a}>0$$

علاوه بر این تابع در نقطه‌ی $x=4$ بر محور xها یا همان $y=0$ مماس است که می‌دانیم اگر $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای مانند x_0 بر هم مماس باشند:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) & \text{ریشه‌ی مضاعف دارد} \\ f'(x_0)=g'(x_0) & \text{ریشه‌ی ساده دارد} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=ax^3+bx^2-16 \\ y_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} ax^3+bx^2-16=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف دارد}} 64a+16b=16 \quad ② \\ 3ax^2+2bx=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی ساده دارد}} \end{matrix}$$

در قسمت ① بررسی شده

$$①,② \begin{cases} 6a+b=0 \\ 4a+b=1 \end{cases}\Rightarrow 2a=-1\Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

۴. گزینه‌ی (۴)

$$y'=7(x-1)^6(x-2)^8+8(x-2)^7(x-1)^7$$

$$y'=(x-1)^6(x-2)^7(7(x-2)+8(x-1))=0 \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

		1		2	
y'	+		−		+
	نسبی max		نسبی min		

۵. گزینه‌ی (۳)

نکته: اکسترمم نسبی هم در خود تابع صدق می‌کند و هم در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

$$-2=\frac{1+a+b}{2}\Rightarrow a+b+1=-4\Rightarrow \underline{a+b=-5} \quad ①$$

$$\text{Hop}\Rightarrow y=\frac{2x+a}{1}\Rightarrow -2=\frac{2+a}{1}\Rightarrow 2+a=-2$$

$$\Rightarrow \underline{a=-4}\Rightarrow \underline{b=-1}$$

۶. گزینه‌ی (۱)

$$y'=2x^2-6x+4=0 \begin{cases} x=1\Rightarrow y=\frac{2}{3} \\ x=2\Rightarrow y=\frac{16}{3}-12+7=\frac{1}{3} \end{cases}$$

بررسی شده $x=1$: ابتدا و انتهای بازه

$$x=3\Rightarrow 18-27+11=2$$

بنابراین min مطلق برابر $\frac{1}{3}$ است.

۷. گزینه‌ی (۱)

$$y'=\frac{(2x-2)(x+a)-(x^2-2x)}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2ax-2x-2a-x^2+2x}{(x+a)^2}=\frac{x^2+2ax-2a}{(x+a)^2}$$

$$\Delta=4a^2+8a>0$$

		-2		0	
	+		−		+

Δ صورت باید بزرگ‌تر از صفر باشد زیرا باید صورت ریشه داشته باشد تا y' به ازای آن ریشه صفر شود.

$$\Rightarrow a<-2\ ,\ a>0$$

۸. گزینه‌ی (۳)

$$y=\frac{\sin x}{\sin x+1}\Rightarrow y'=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}=0\Rightarrow \cos x=0$$

$$\to x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2}$$

		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	
y'	+		−		+

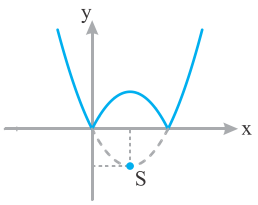
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2}$$

۹. گزینه‌ی (۳)

بهترین روش رسم منحنی است که به وسیله‌ی رأس سهمی و نقاط برخورد x^2-2x با محورها این تابع را رسم می‌کنیم و سپس قدرمطلق آن را رسم می‌کنیم.

$$y=x^2-2x\to \begin{cases} S(1,-1) \\ S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}) \end{cases}$$

نقاط برخورد با xها : $x^2-2x=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$



بنابراین همانگونه که می‌بینیم $x=0$ و $x=2$ نقاط min نسبی تابع است.

۱۰. گزینه‌ی (۴)

برای یافتن اکسترمم‌های نسبی کافی است از منحنی مشتق بگیریم و مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$y = 3x^{-2} + x^{-3}$$

$$y' = -6x^{-3} - 3x^{-4} = \frac{-6}{x^3} - \frac{3}{x^4} = 0 \Rightarrow \frac{-6}{x^3} = \frac{3}{x^4} \Rightarrow -2x^4 = x^3$$

$$2x^4 + x^3 = 0 \Rightarrow x^3(2x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

		$-\frac{1}{2}$		0	
	$+$		$-$		$-$
	↗		↘		↗

طول نقطه‌ی max نسبی $x = \frac{-1}{2}$

$$\max : y = \frac{3}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{-1}{8}} = 12 - 8 = 4 \text{ نسبی}$$

۱۱. گزینه‌ی (۳)

$$y = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{1+x-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-2)(1) = 9 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-4} \begin{cases} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{cases}$$

		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$		$+$		$-$
	↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘

طول نقطه max : $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

۱۲. گزینه‌ی (۱)

$$y = \frac{1}{\sin x} \to y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow y'' = \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} \Rightarrow \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0 \xrightarrow{\div \cos^2 x}$$

$\tan^2 x + 2 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = -2$ غ ق ق

بنابراین تابع داده شده فاقد نقطه‌ی عطف است.

۱۳. گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

		-1		0		1	
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$

$\Rightarrow -1 < x < 1$ ①

از طرفی با توجه به دامنه‌ی $\text{Ln}x$ یعنی ② $x > 0$:

① ∩ ② $\Rightarrow 0 < x < 1$

۱۴. گزینه‌ی (۲)

نکته: در تابع به فرم $f(x) = (x-\alpha)^{2n+1} g(x)$، $x = \alpha$ طول نقطه‌ی عطف تابع است بنابراین در تابع $f(x) = (x+a)^3 x^{-2}$ ریشه‌ی عبارت $(x \neq a)$ طول نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد.

$$x = 1 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

۱۵. گزینه‌ی (۳)

$$y = -x^3 + x^2 - x + 4$$

$$y' = -3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4 - 4(-3)(-1) = -8 < 0 \\ a = -3 < 0 \end{cases}$$

همواره نزولی $\Rightarrow$ همواره منفی

در گزینه‌ها تنها گزینه‌ی (۳) همواره نزولی است.

۱۶. گزینه‌ی (۲)

$$y' = 2\sin x \cos x + \cos x = \cos x(2\sin x + 1)$$

$$\xrightarrow{\text{در اطراف } x = \frac{\pi}{6}} y' > 0 \text{ همواره}$$

بنابراین تابع همواره صعودی است یعنی گزینه‌ی (۲).

۱۷. گزینه‌ی (۱)

$$y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = 2 + \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$y'' = 2 - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{4x\sqrt{x}} \Rightarrow 8x\sqrt{x} = 1$$

$$\Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

	0		$\frac{1}{4}$		1
y''		$-$		$+$	
		∩		∪	

۱۸. گزینه‌ی (۴)

$$y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \to x = 0 \\ 2x = \pi \to x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0 < \underset{\Downarrow}{x} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < 2x < \pi \to \sin 2x > 0$$

بنابراین x باید بین $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد و گزینه‌ی (۴) زیر مجموعه‌ی این بازه است.

۱۹. گزینه‌ی (۱)

تابع در $x = 1$ و $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست زیرا:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,|x-1|$$

$x = 1$ (ریشه ساده درون قدرمطلق) نقطه‌ی زاویه‌دار و $x = 0$ نقطه‌ی عطف مشتق‌ناپذیر تابع است. این دو نقطه نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند.

$$f(x) = \begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow y = (x-1)\sqrt[3]{x} \\ y' = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1) = 0 \Rightarrow -3x = x - 1 \\ 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \notin (1, +\infty) \\ x < 1 \Rightarrow y = (-x+1)\sqrt[3]{x} \\ \Rightarrow y' = -\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(-x+1) = 0 \\ \Rightarrow 3x = -x + 1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

بنابراین $x = \frac{1}{4}$ هم نقطه‌ی بحرانی تابع است زیرا مشتق تابع در این نقطه صفر می‌شود.

۲۰. گزینه‌ی (۱)

$$y=(x-1)^3+3(x-1)$$
$$y'=3(x-1)^2+3$$
$$y''=6(x-1)=0\Rightarrow x=1$$

	۱	
−	۰	+
∩		∪

$\Rightarrow x=1$ نقطه‌ی عطف

$$\begin{cases} y_1=m(x-1)\\ y_2=(x-1)((x-1)^2+3)\end{cases}$$

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول x_0 بر هم مماس باشند:

$$\begin{cases} 1)\ f(x_0)=g(x_0) & \text{ریشه‌ی مضاعف دارد}\\ 2)\ f'(x_0)=g'(x_0) & \text{ریشه‌ی ساده دارد}\end{cases}$$

$$y_1'=y_2'\Rightarrow m=((x-1)^2+3)+2(x-1)^2\overset{x=1}{\Rightarrow} m=3$$

آزمون جامع «۳»

۱. گزینه‌ی (۱)

ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در چه نقاطی برابر صفر است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x\le 0\xrightarrow{\text{مشتق}}2x=0\Rightarrow x=0\\ x+1 & 0<x<2\xrightarrow{\text{مشتق}}1\ne 0\end{cases}$$

سپس نقاطی را می‌یابیم که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست.

$$\text{نقطه‌ی مرزی } x=0\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1\end{cases}\rightarrow \text{تابع در این نقطه پیوسته نیست}$$

$\Rightarrow$ نقطه‌ی بحرانی $x=0\Rightarrow$ در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیست

۲. گزینه‌ی (۲)

$$f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2-6x)(x^3-3x^2+4)^{\frac{-2}{3}}=\frac{(3x^2-6x)}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}}$$

نقاط بحرانی:
- $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-6x=0\Rightarrow x=0$ ، $x=2$
- $f'(x)$ تعریف نشده $\Rightarrow x^3-3x^2+4=0$
  $\Rightarrow x=-1\ ,\ x=2$

دقت کنید برای یافتن ریشه‌های $x^3-3x^2+4=0$ از راه عددهی $x=-1$ را می‌یابیم و برای یافتن ریشه‌های دیگر عبارت را بر $x+1$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2+4 & x+1\\ \hline -x^3\pm x^2 & x^2-4x+4\rightarrow (x-2)^2=0\Rightarrow x=2\\ \hline -4x^2+4 & \\ \mp 4x^2\mp 4x & \\ \hline 4x+4 & \\ 4x+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بنابراین تنها نقطه‌ی بحرانی تابع روی بازه‌ی $(-1,2)$، $x=0$ است و داریم:

x		0	
y'	+	0	−
y	↗		↘

بنابراین $x=0$ نقطه max تابع است.

۳. گزینه‌ی (۴)

با توجه به هم‌ارزی تابع رادیکالی در بی‌نهایت خواهیم داشت:

$$f(x)=ax+|x+\frac{b}{2}|$$

$$\begin{cases} x\to+\infty & f(x)=(a+1)x+\frac{b}{2}\\ x\to-\infty & f(x)=(a-1)x-\frac{b}{2}\end{cases}$$

با توجه به اینکه وقتی $x\to-\infty$ مجانب افقی، $y=0$ داریم:

$$y=(a-1)x-\frac{b}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

از طرفی با توجه شکل، عرض از مبدأ منحنی مثبت است بنابراین $c>0$ است.

۴. گزینه‌ی (۱)

برای اینکه منحنی از چهار ناحیه‌ی مختصات بگذرد باید تابع دو ریشه داشته باشد و حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد.

$$y=(m+2)x^2-2x+1$$

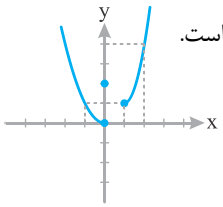
دو ریشه داشته باشد: $\Delta>0\Rightarrow 4-4(m+2)>0$

$\Rightarrow \underline{m<-1}$ ①

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{1}{m+2}<0\Rightarrow \underline{m<-2}$ ②

① ∩ ② : $m<-2$

۵. گزینه‌ی (۴)



بهترین روش با توجه به توابع داده شده رسم است.

min نسبی $x=1$

min نسبی و مطلق $x=0$

۶. گزینه‌ی (۱)

$$y'=3x^2-6x=0\Rightarrow x=0,x=2$$

		0		2	
y'	+		−		+
	↗	نسبی max	↘	نسبی min	↗

$x=0\Rightarrow y=c\xrightarrow{y=ax+b}c=b$ ①

$x=2\Rightarrow y=c-4\xrightarrow{y=ax+b}c-4=2a+b$

$\rightarrow c=2a+b+4$ ②

① = ② $\Rightarrow b=2a+b+4\Rightarrow 2a=-4\Rightarrow \underline{a=-2}$

۷. گزینه‌ی (۲)

چون مشتق تابع همواره مثبت است، تابع ضروری است.

تابع $g(x)$ صعودی است $g'(x)=3x^2+1>0$

بنابراین برای به دست آوردن max تابع gof کافی است بیشترین مقدار f را به ازای $x\le 1$ محاسبه کرده و در تابع g قرار دهیم:

$$f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1$$

$$\begin{matrix}f(-1)=2\\ f(1)=-2\end{matrix}\Rightarrow f(-1)=2\Rightarrow m(g(f(x)))=g(f(-1))$$
$$=g(2)=10$$

۸. گزینه‌ی (۴)

$y' = ۴x^۳ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow ۴x(x^۲ - ۳) = ۰ \to x = ۰, x = \pm\sqrt{۳}$

		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
y'	−	۰	+	۰	−	۰	+
	↘		↗		↘		↗
		min نسبی		max نسبی		min نسبی	

$\Rightarrow x = ۰, y = ۵ \Rightarrow A(۰,۵)$ نقطه‌ی max نسبی

$y'' = ۱۲x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

		-۱		$+۱$	
	+	۰	−	۰	+
	∪		∩		∪

$\Rightarrow x = \pm ۱$ نقطه‌ی عطف

$B(۱,۰)$ $c(-۱,۰)$ نقاط عطف

$|AB| = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۵)^۲} = \sqrt{۲۶}$

$|AC| = \sqrt{(-۱-۰)^۲ + (۰-۵)^۲} = \sqrt{۲۶}$

۹. گزینه‌ی (۳)

$f'(x) = ۴x^۳ + ۴x^۲ - ۸x = ۰$

$۴x(x^۲ + x - ۲) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱, x = -۲ \end{cases}$

		-۲		۰		۱	
	−	۰	+	۰	−	۰	+
	↘		↗		↘		↗

$x = -۲, x = ۱$ طول نقطه‌ی min نسبی

$x = ۰$ طول نقطه‌ی max نسبی

۱۰. گزینه‌ی (۳)

$$y = \begin{cases} x \geq ۳ \quad x^۳ - ۳x^۲ \to y' = ۳x^۲ - ۶x \\ \to y'' = ۶x - ۶ = ۰ \to x = ۱ \quad \text{غ ق ق} \\ x < ۳ \quad -x^۳ + ۳x^۲ \to y' = -۳x^۲ + ۶x \\ \to y'' = -۶x + ۶ = ۰ \to x = ۱ \end{cases}$$

نقطه‌ی مرزی $x = ۳$ را نیز برای تعیین علامت y'' باید در نظر بگیریم.

		۱		۳	
y''	+		−		+
	∪		∩		∪

$\max(b - a) = ۳ - ۱ = ۲$

۱۱. گزینه‌ی (۴)

تابع در این بازه صعودی است $x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$

$f'(x) = \dfrac{۱ + x^۲ - ۲x^۲}{(۱ + x^۲)^۲} = \dfrac{-x^۲ + ۱}{(۱ + x^۲)^۲} = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

		-۱		$+۱$	
	−	۰	+	۰	−
	↘		↗		↘

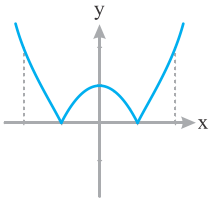
بنابراین تابع در بازه‌ی $(-۱,۱)$ صعودی است.

۱۲. گزینه‌ی (۳)

نکته: تابع قدرمطلق در ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق مشتق‌پذیر نیست (این نقاط جزء نقاط زاویه‌دار تابع محسوب می‌شوند).

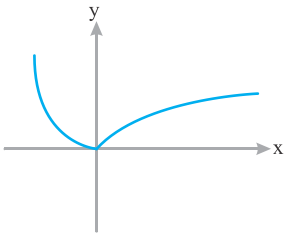
$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

بنابراین تابع در این بازه مشتق‌پذیر نیست ولی با توجه به نمودار تابع، تابع در بازه‌ی $[-۲,۲]$ مینیمم مطلق دارد و نقاط $x = ۱$ و $x = -۱$ نقاط min مطلق تابع‌اند.



۱۳. گزینه‌ی (۱)

با توجه به تابع، بهترین راه رسم منحنی است بنابراین تابع نقطه عطف ندارد و $x = ۰$ نقطه‌ی min نسبی و مطلق تابع است.



۱۴. گزینه‌ی (۴)

انحنای تابع در نقطه‌ی عطف عوض می‌شود و $(-۱,۲)$ نقطه‌ی عطف تابع است.

$$\begin{cases} f(-۱) = ۲ \\ f''(-۱) = ۰ \end{cases}$$

$f(x) = ax^۴ + bx^۲ + c \to f'(x) = ۴ax^۳ + ۲bx$

$\to f''(x) = ۱۲ax^۲ + ۲b$

$$\begin{cases} f''(-۱) = ۰ \\ ۱۲a + ۲b = ۰ \Rightarrow ۶a + b = ۰ \quad ① \end{cases}$$

$f(-۱) = a + b + c = ۲ \quad ②$

$x = ۰, y = -۳$: منحنی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند.

$\Rightarrow \underline{-۳ = c} \xrightarrow{②} a + b = ۵ \quad ③$

$① , ③ \begin{cases} ۶a + b = ۰ \\ a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۵ \Rightarrow \underline{a = -۱} \Rightarrow \underline{b = ۶}$

$۵a + ۵b + c = ۵(-۱) + ۵(۶) - ۳ = -۵ + ۳۰ - ۳ = ۲۲$

۱۵. گزینه‌ی (۳)

۱) نقطه‌ی $(۲,۰)$ و $(۰,-۲)$ در مجانب مایل تابع صدق می‌کند.

۲) نقطه‌ی $(۱,۰)$ min مطلق تابع است.

$f(۱) = ۰$

$f'(۱) = ۰$

۳) $x = ۰$ مجانب قائم منحنی است.

$c' = ۰$ (با توجه به ۳) ①

$f(۱) = ۰ \Rightarrow \dfrac{۱ + b + c}{b'} = ۰ \Rightarrow b + c + ۱ = ۰$ (با توجه به ۲)

$\Rightarrow b + c = -۱ \quad ②$

و ضمناً در این‌گونه توابع اکسترمم در Hop تابع هم صدق می‌کند.

هوپیتال : $y = \dfrac{۲x + b}{b'}$

$x = ۱, y = ۰ \to ۲ + b = ۰$

$b = -۲ \xrightarrow{②} c = ۱$

$y = \dfrac{x^۲ - ۲x + ۱}{b'x}$

$$\begin{array}{r|l} x^{۲}-۲x+۱ & b'x \\ \hline x^{۲} & \frac{۱}{b'}x-\frac{۲}{b'} \\ \hline -۲x & \\ -۲x & \\ \hline ۱ & \end{array}$$

مجانب مایل (با توجه به ۱

$$y=\frac{۱}{b'}x-\frac{۲}{b'}\xrightarrow{(۰,-۲)}-۲=\frac{-۲}{b'}\Rightarrow b'=۱$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} b+c+b'+c'=-۲+۱+۱+۰=۰$$

۱۶. گزینه‌ی (۴)

$$y'=\frac{-۲\sin x}{(۱+۲\cos x)^{۲}}\xrightarrow{x=\pi}y'=۰$$

		۰	
y'	$-$		$+$
	↘		↗

$\Rightarrow$ $x=۰$ نقطه‌ی min نسبی تابع است.

۱۷. گزینه‌ی (۱)

$$f'(x)=۱+\tan^{۲}x-۱-\cot^{۲}x=\tan^{۲}x-\cot^{۲}x$$

$$f''(x)=۱+\tan^{۲}x+۱+\cot^{۲}x=۲+\tan^{۲}x+\cot^{۲}x>۰$$

$f''(x)$ همواره مثبت است بنابراین جهت تقعر تابع همواره روبه بالاست.

۱۸. گزینه‌ی (۲)

$$y=(x-۱)^{۳}(x+۱)$$

$$y'=۳(x-۱)^{۲}(x+۱)+(x-۱)^{۳}=(x-۱)^{۲}(۳x+۳+x-۱)$$

$$=(x-۱)^{۲}(۴x+۲)=۰\rightarrow x=\frac{-۱}{۲}\quad x=۱$$

		$-\frac{۱}{۲}$		۱	
y'	$-$	۰	$+$	۰	$+$

بنابراین در بازه‌ی $x<\frac{-۱}{۲}$ نزولی است.

۱۹. گزینه‌ی (۳)

$$f'(x)=۱۲x^{۳}-۱۲x^{۲}=۰\Rightarrow ۱۲x^{۲}(x-۱)=۰$$

$$\rightarrow x=۰, x=۱$$

$$f(۰)=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۱)=-۱ \\ f(-۱)=۷ \\ f(۲)=۴۸-۳۲=۱۶ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \text{مطلق } \min=-۱ \\ \text{مطلق } \max=۱۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۶-۱=۱۵$$

۲۰. گزینه‌ی (۴)

$$f'(x)=\frac{۵}{۳}x^{+\frac{۲}{۳}}-\frac{۱۰}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۵\sqrt[۳]{x^{۲}}}{۳}-\frac{۱۰}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۵x-۱۰}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\text{نقاط بحرانی}\begin{cases} \text{صورت کسر}=۰\Rightarrow ۵x-۱۰=۰\Rightarrow x=۲ \\ \text{مخرج کسر}=۰\Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x^{۲}}=۰\Rightarrow x=۰ \end{cases}$$

می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه جزء نقاط بحرانی تابع محسوب نمی‌شوند پس این تابع فقط در $x=۰$ بحرانی است.